Problemi di Fisica

Principio conservazione momento angolare

TEORIA

- Per un corpo puntiforme m che ruota su una circonferenza di raggio R con velocità costante v, il momento angolare, in modulo, è esprimibile come:

$$L = mvR = m\omega R^2$$

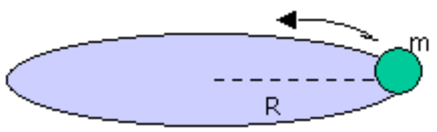
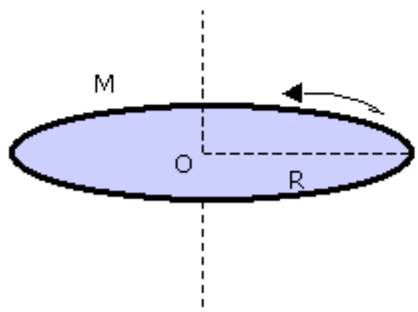
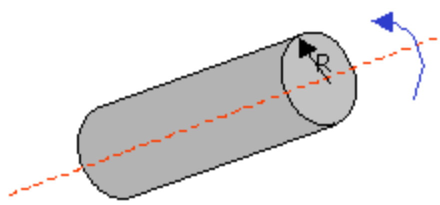
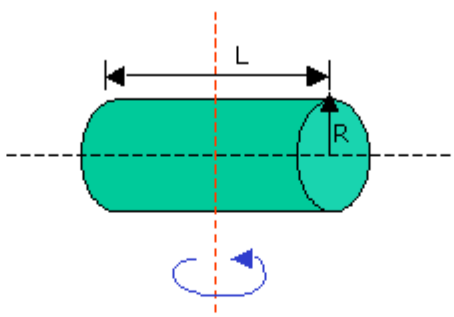
- Per i corpi rigidi, ossia per corpi composti da diverse particelle di massa m_i che possono ruotare con diverse velocità alla distanza r_i intorno ad un asse di rotazione, il momento angolare, in modulo, assume la forma:

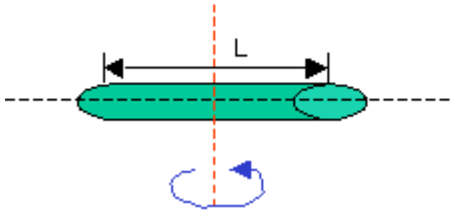
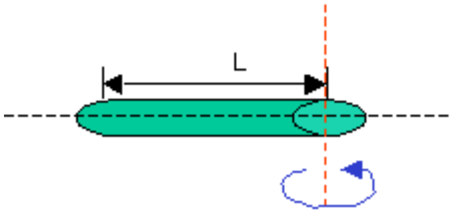
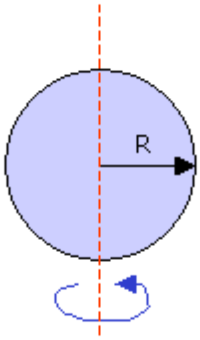
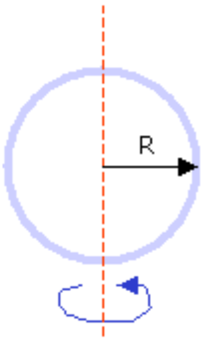
$$L = I\omega$$

dove:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \qquad \text{Momento d'inerzia}$$

Il calcolo del momento d'inerzia è in generale molto complesso, per cui riportiamo nella seguente tabella le formule per calcolare il momento d'inerzia di alcuni corpi rigidi:

TIPO DI CORPO	RAPPRESENTAZIONE	MOMENTO D'INERZIA
Punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R		$I = mR^2$
Anello di raggio R e massa M che ruota rispetto al proprio asse		$I = MR^2$
Cilindro pieno di massa M e raggio R che ruota rispetto al proprio asse		$I = \frac{MR^2}{2}$
Cilindro pieno di massa M, raggio R e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse passante per il centro, perpendicolare all'asse del cilindro		$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$

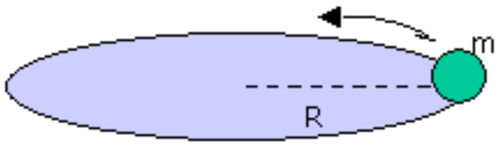
Sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il suo centro		$I = \frac{ML^2}{12}$
Sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra passante per un suo estremo		$I = \frac{ML^2}{3}$
Sfera piena di raggio R e massa M che ruota rispetto ad un suo diametro		$I = \frac{2}{5} MR^2$
Guscio sferico di massa M e raggio R che ruota rispetto ad un suo diametro		$I = \frac{2}{3} MR^2$

PROBLEMA

Una persona di massa M=80 kg salta sull'unico seggiolino di una giostra in rotazione a velocità angolare costante. Sapendo che il raggio della giostra è R=5 m, che la massa del seggiolino è m=100 kg e che compie 1 giro in 4 s, calcolare il periodo di rotazione della giostra dopo che la persona è salita, nell'ipotesi di trascurare la velocità iniziale della persona e gli attriti.

SOLUZIONE

Il sistema è approssimabile a quello di un punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R. Poiché per ipotesi non agiscono forze esterne, vale il principio di conservazione della quantità di moto che ci consente di calcolare la velocità angolare finale:



$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R^2}\omega_i = (m+M)\cancel{R^2}\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{m}{m+M}\cdot\omega_i = \frac{100}{180}\cdot 1{,}57 = 0{,}87\,rad/s$$

dove:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\,rad/s$$

Pertanto, il periodo della giostra dopo che la persona è salita è dato da:

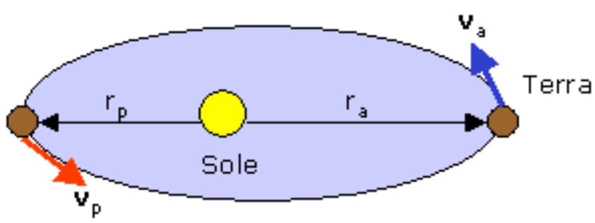
$$T = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{2\pi}{0{,}87} = 7{,}2s$$

PROBLEMA

La velocità della Terra all'afelio è $v_a=2{,}93\cdot10^4$ m/s e la sua distanza è $r_a=1{,}52\cdot10^{11}$ m. Calcolare la velocità della Terra al perielio dove la distanza è $r_p=1{,}47\cdot10^{11}$ m.

SOLUZIONE

Considerando puntiforme la Terra nel suo moto intorno al Sole, e trascurando l'effetto di tutte le forze esterne al sistema Sole + Terra, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare per poter calcolare la velocità della Terra al perielio:

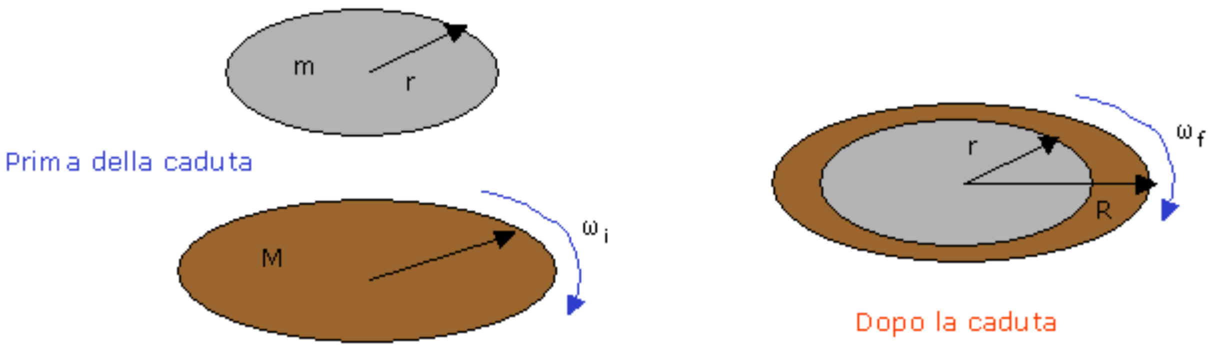


$$\vec{L}_a = \vec{L}_p \Rightarrow m_T v_a r_a = m_T v_p r_p \Rightarrow v_p = \frac{r_a}{r_p}\cdot v_a = \frac{1{,}52\cdot10^{11}}{1{,}47\cdot10^{11}}\cdot 2{,}93\cdot10^4 = 3{,}03\cdot10^4\,m/s$$

PROBLEMA

Un disco di massa m=300 kg e raggio r=3 m cade su una piattaforma circolare rotante di massa M=500 kg e raggio R=5m in maniera tale che i due centri coincidono. Calcolare la frequenza di rotazione finale della piattaforma dopo la caduta del corpo, sapendo che inizialmente era f_i=0,1 Hz.

SOLUZIONE



Poiché si conserva il momento angolare totale, si ha:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad (1)$$

Il momento d'inerzia per una piattaforma rotante, cioè per un cilindro di raggio R che ruota intorno al proprio asse, come si evince dalla tabella, è dato da:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

per cui la (1) diventa:

$$\frac{MR^2}{2}\cdot\omega_i = \frac{mr^2}{2}\cdot\omega_f + \frac{MR^2}{2}\cdot\omega_f \Rightarrow \frac{MR^2}{2}\cdot\omega_i = \frac{mr^2 + MR^2}{2}\cdot\omega_f$$

dove il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia dei due dischi.

Risolvendo rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco 1 + disco 2:

$$\omega_f = \frac{\frac{MR^2}{2}}{\frac{mr^2 + MR^2}{2}}\cdot\omega_i = \frac{MR^2}{mr^2 + MR^2}\cdot\omega_i = \frac{500\cdot 5^2}{300\cdot 3^2 + 500\cdot 5^2}\cdot 0{,}63 = 0{,}52\,\text{rad/s}$$

dove:

$$\omega_i = 2\pi f_i = 2\pi\cdot 0{,}1 = 0{,}63\,\text{rad/s}$$

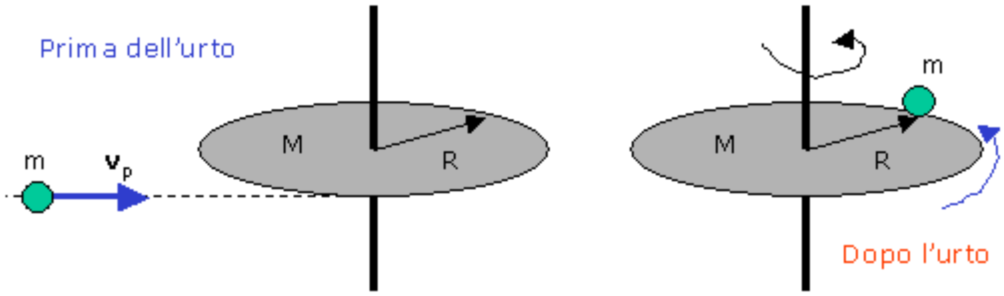
Pertanto, la frequenza di rotazione della piattaforma formata dal sistema disco 1 + disco 2 è data da:

$$f = \frac{\omega_f}{2\pi} = \frac{0{,}52}{2\pi} = 0{,}08\,\text{Hz}$$

PROBLEMA

Un disco di raggio R = 1 m e massa M = 10 kg è in quiete appeso ad un filo verticale passante per il suo centro, intorno al quale può ruotare. Un proiettile di massa m = 100 g e velocità v_p = 50 m/s urta tangenzialmente il disco e vi rimane conficcato dopo l'urto. Calcolare la velocità tangenziale ed angolare del sistema dopo l'urto.

SOLUZIONE



Nell'ipotesi che il momento torcente delle forze agenti sul sistema sia nullo, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R}^2\omega_p = m\cancel{R}^2\omega_D + \frac{M\cancel{R}^2}{2}\omega_D \Rightarrow m\omega_p = \frac{2m+M}{2}\cdot\omega_D \quad (1)$$

dove:

- il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia del proiettile e del disco;
- il momento d'inerzia per un disco rotante, cioè per un cilindro di raggio R che ruota intorno al proprio asse, come si evince dalla tabella, è dato da:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_D, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco + proiettile:

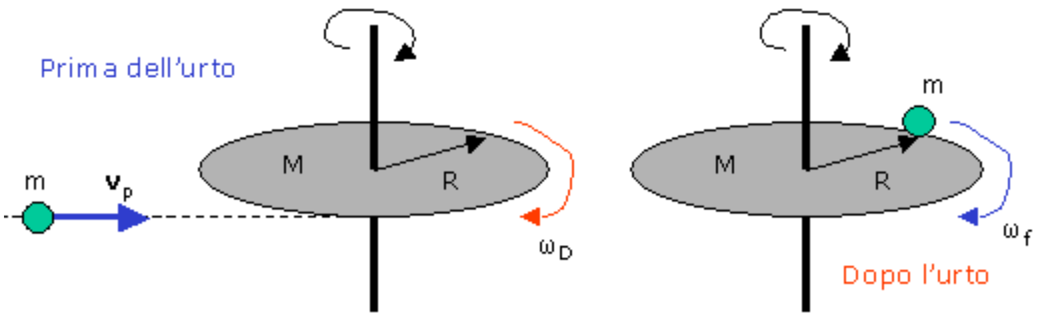
$$\omega_D = \frac{2m}{2m+M}\cdot\omega_p = \frac{2\cdot 0{,}1}{2\cdot 0{,}1+10}\cdot 50 = 0{,}98\,rad/s \qquad \text{dove:} \qquad \omega_p = \frac{V_p}{R} = \frac{50}{1} = 50\,rad/s$$

mentre, la velocità tangenziale sarà:

$$v_D = \omega_D\cdot R = 0{,}98\cdot 1 = 0{,}98\,m/s$$

PROBLEMA

Risolvere il problema precedente nel caso in cui il disco abbia una velocità angolare ω=2 rad/s in verso contrario al moto imposto dal proiettile.



SOLUZIONE

Poiché siamo nelle stesse condizioni del problema precedente, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow m\cancel{R}^2\omega_p - \frac{M\cancel{R}^2}{2}\cdot\omega_D = m\cancel{R}^2\omega_f + \frac{M\cancel{R}^2}{2}\omega_f \Rightarrow \frac{2m\omega_p - M\omega_D}{\cancel{2}} = \frac{2m+M}{\cancel{2}}\cdot\omega_f \quad (1)$$

dove:

- i momenti d'inerzia iniziale I_i e finale I_f sono la somma dei momenti d'inerzia iniziale e finale del proiettile e del disco;
- il segno negativo del momento d'inerzia del disco indica che il moto del disco avviene in senso contrario a quello del proiettile.

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema disco + proiettile dopo l'urto:

$$\omega_f = \frac{2m\omega_p - M\omega_D}{2m+M} = \frac{2\cdot 0{,}1\cdot 50 - 10\cdot 2}{2\cdot 0{,}1 + 10} = -0{,}98\,\text{rad/s} \qquad \text{dove:} \qquad \omega_p = \frac{V_p}{R} = \frac{50}{1} = 50\,\text{rad/s}$$

mentre la velocità tangenziale sarà:

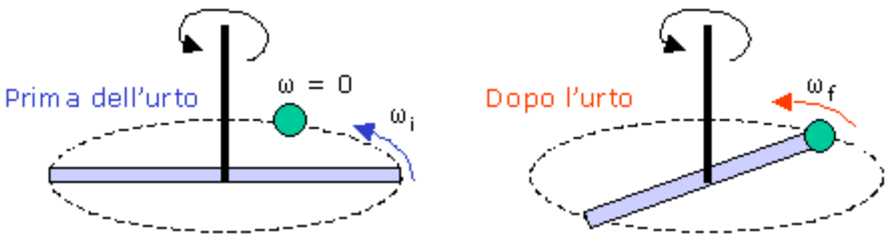
$$v = \omega_f \cdot R = -0{,}98\cdot 1 = -0{,}98\,\text{m/s}$$

Il segno meno indica che il sistema disco + proiettile dopo l'urto ruota nel verso iniziale di rotazione del disco.

PROBLEMA

Un'asta lunga L=1m e di massa M=5 kg, che ruota in un piano orizzontale appesa ad un filo che passa per il suo centro con velocità angolare ω_i = 1 rad/s, urta una piccola sfera di massa m=0,5 kg in quiete. Dopo l'urto i due corpi rimangono incastrati. Determinare la velocità angolare e tangenziale del sistema dopo l'urto, considerando la sfera come un punto materiale.

SOLUZIONE



Nell'ipotesi che il momento torcente delle forze agenti sul sistema sia nullo, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i = mR^2\omega_f + \frac{ML^2}{12}\omega_D \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i = \frac{12mR^2 + ML^2}{12}\omega_f \quad (1)$$

dove:

- il momento d'inerzia finale I_f è la somma dei momenti d'inerzia dell'asta e del punto materiale;
- il momento d'inerzia di una sbarra sottile di massa M e lunghezza L che ruota rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il suo centro e quello di un punto materiale m che ruota su una circonferenza di raggio R, sono:

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad I = mR^2$$

Risolvendo la (1) rispetto ad ω_f, calcoliamo la velocità angolare del sistema asta + massa:

$$\omega_f = \frac{ML^2}{12mR^2 + ML^2}\cdot\omega_i = \frac{5\cdot 1^2}{12\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5^2 + 5\cdot 1^2} = 0{,}77\,\text{rad/s}$$

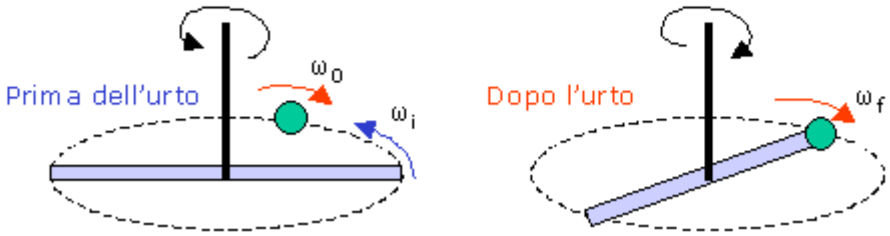
mentre la velocità tangenziale è:

$$v = \omega_f \cdot R = 0{,}77\cdot 0{,}5 = 0{,}38\,\text{m/s}$$

PROBLEMA

Risolvere il problema precedente nel caso in cui la sfera abbia una velocità angolare ω_0=-5 rad/s (la velocità angolare è diretta in verso contrario al moto dell'asta)

SOLUZIONE



Poiché siamo nelle stesse condizioni del problema precedente, possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_i - mR^2\omega_0 = mR^2\omega_f + \frac{ML^2}{12}\omega_D \Rightarrow$$
$$\frac{ML^2\omega_i - 12mR^2\omega_0}{12} = \frac{12mR^2 + ML^2}{12}\omega_f$$

dove:

- i momenti d'inerzia iniziale I_i e finale I_f sono la somma dei momenti d'inerzia iniziale e finale della massa e dell'asta;
- il segno negativo del momento d'inerzia della massa indica che il moto della massa avviene in senso contrario a quello dell'asta.

Pertanto, la velocità angolare ω_f del sistema asta + massa si calcola come:

$$\omega_f = \frac{ML^2\omega_i - 12mR^2\omega_0}{12mR^2 + ML^2} \cdot \omega_i = \frac{5 \cdot 1^2 \cdot 1 - 12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 \cdot 5}{12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 1^2} = -0{,}38 \text{rad/s}$$

mentre la velocità tangenziale è:

$$v = \omega_f \cdot R = -0{,}38 \cdot 0{,}5 = 0{,}19 \text{m/s}$$

Il segno meno indica che il sistema asta + massa dopo l'urto ruota nel verso contrario a quello iniziale dell'asta.